1. Обозначим через $\mathbb{H}$ полуплоскость $\{\mathrm{Im} z > 0\}$, а через T – внутренность равностороннего треугольника с вершинами $0, 1, (1+i\sqrt{3})/2$.

1) Покажите, что существует взаимно-однозначное голоморфное отображение из $\mathbb{H}$ в T, определяемое равенством

$$w(z) = c\int\limits_0^z \zeta^{-2/3}(1-\zeta)^{-2/3}\,d\zeta,$$

где c – некоторая постоянная.

2) Чему равно c?

3) Покажите, что обратное отображение $z(w) : T \to \mathbb{H}$ может быть аналитически продолжено до мероморфной функции, заданной во всей w-плоскости.

2. Рассмотрим $\mathbb{Z}$ как подгруппу $\mathbb{C}$ и обозначим через $X = \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ риманову поверхность, полученную при помощи факторизации. Найдите биголоморфное отображение из X в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Пользуясь им, найдите необходимое и достаточное условие периодичности целой функции $f(z)$ с периодом 1 (то есть, необходимое и достаточное условие того, что $f(z+1) = f(z)$, для всех $z \in \mathbb{C}$).

3. Пусть заданы вещественные числа $a \geq b > 0$. Обозначим $k = \sqrt{a^2-b^2}/a$ и рассмотрим отображение

$$x \mapsto y(x) = \int\limits_0^x \frac{\sqrt{a^2-k^2s^2}}{\sqrt{a^2-s^2}}\,ds, \quad 0 \leq x \leq a.$$

1) Покажите, что обратное отображение $y \mapsto x(y)$ может быть аналитически продолжено до мероморфной функции во всей комплексной плоскости с одним вещественным периодом и, если $k > 0$, одним мнимым периодом.

2) Чему равен вещественный период отображения $y \mapsto x(y)$?

3) Что происходит при $k \to 0$?

4. *Детские рисунки (dessins d'enfants).* Пусть X – риманова поверхность, f – *функция Г.В. Белого,* то есть, голоморфная функция на X со значениями в сфере Римана $\mathbb{P}$, чье множество критических значений содержится в множестве $\{0, 1, \infty\}$. Пара (X, f) называется *парой Белого.* С каждой такой парой свяжем граф (детский рисунок) на поверхности X, чьи вершины окрашены в два разных цвета (например, белый и черный). При этом белыми вершинами графа являются точки $f^{-1}(0)$, черными вершинами – точки $f^{-1}(1)$, а ребрами – прообразы отрезка $[0,1] \subset \mathbb{P}$ относительно отображения f.

1) Пусть f имеет лишь одно критическое значение. Какой вид может иметь в этом случае соответствующий детский рисунок?

2) Пусть детский рисунок является цепью, то есть, имеет две крайние вершины валентности 1, в то время как все остальные имеют валентность 2. Приведите пример пары Белого, которой соответствует такой детский рисунок.